CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition

Coefficient : 2,5 – Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé, notamment celui des calculatrices de poche, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte neuf pages.

L'énoncé est constitué de cinq parties.

La première partie porte sur le calcul d'une intégrale classique
La deuxième est consacrée à l'étude de la fonction Gamma d'Euler, définie comme une intégrale généralisée.
La troisième relie la fonction Gamma et la fonction Bêta.
La quatrième étudie les lois Gamma et en particulier la loi du Chi-deux.
Enfin, la cinquième partie montre comment une variable suivant une loi du Chi-deux est obtenue lors d'un tirage.

La cinquième partie est largement indépendante du reste du problème.

On désigne par :
$\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels ;*
$\mathbb{N}^*$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls ;*
$\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels ;*
$\mathbb{R}_+^*$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *constitué des nombres réels strictement positifs.*

Première Partie

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et en déduire celle de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2. Le plan réel euclidien E est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$; .*r* est un réel strictement positif.
On pose : $C_r = \left\{ (x;y) \in E / 0 \le x \le r \ \ et \ \ 0 \le y \le r \right\}$,
$Q_r = \left\{ (x;y) \in E / x \ge 0 ; y \ge 0 ; \quad x^2 + y^2 \le r^2 \right\}$, et $Q'_r = \left\{ (x;y) \in E / x \ge 0 ; y \ge 0 ; \quad x^2 + y^2 \le 2r^2 \right\}$.

a. Représenter dans le même repère C_r , Q_r et Q'_r.

On pose pour *x* et *y* réels, $f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

et $I_r = \iint_{C_r} f(x,y)dxdy$, $J_r = \iint_{Q_r} f(x,y)dxdy$, $J'_r = \iint_{Q'_r} f(x,y)dxdy$

b. Justifier la double inégalité : $J_r \le I_r \le J'_r$.

c. Calculer J_r et J'_r.

d. En déduire que : $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right) \le \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2r^2}\right)$.

e. Etablir que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Deuxième partie
Quelques propriétés de la fonction Γ

On définit la fonction Γ par : $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$.

1. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$ converge.

   En déduire que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Préciser le signe de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Prouver que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Gamma(x) = +\infty$.

3. a. Etablir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   b. En déduire une expression simple de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. a. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (on se ramènera par un changement de variable à l'intégrale de la première partie).

   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

5. **Dérivabilité de la fonction** Γ

   a. Pour $x>0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt$

   On prouvera la convergence sur $]0;1]$, en distinguant les cas $x>1$ et $x\leq 1$, puis la convergence sur $[1;+\infty[$.

   b. On fixe $x_0 > 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_0 - \alpha > 1$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   En appliquant une inégalité de Taylor-Lagrange à l'application $x \mapsto t^{x-1}$, montrer que :
   (*) $\forall x \in [x_0-\alpha; x_0+\alpha]$,

$$\left|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x-x_0)(\ln t)t^{x_0-1}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2\, t^{x_0+\alpha-1} & \text{si } t \in [1;+\infty[\\ \dfrac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2\, t^{x_0-\alpha-1} & \text{si } t \in]0;1[. \end{cases}$$

En déduire l'existence d'un réel M_1 ne dépendant que de x_0 et de α, tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\ x \neq x_0,\ \left| \frac{\Gamma(x) - \Gamma(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x_0 - 1} e^{-t}\, dt \right| \leq M_1 |x - x_0|$$

En déduire que Γ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous la forme d'une intégrale impropre.
Etablir alors, en utilisant de nouveau l'inégalité (*), l'existence d'un réel M_2 ne dépendant que de x_0 et de α, tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\ x \neq x_0,\ \left| \frac{\Gamma'(x) - \Gamma'(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} (\ln t)^2\, t^{x_0 - 1} e^{-t}\, dt \right| \leq M_2 |x - x_0|.$$

Prouver que Γ est 2 fois dérivable sur $]1;+\infty[$ et préciser Γ'' sur cet intervalle.

On admet que Γ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'expression de Γ'' trouvée précédemment est encore valable sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. a. Montrer que Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Montrer que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

   c. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, puis en déduire l'existence d'un unique réel strictement positif x_0 tel que $\Gamma'(x_0) = 0$.

   d. Etudier les variations de Γ et la nature de la branche infinie en $+\infty$. Donner une allure de son graphe.

Troisième partie
Fonction Γ et fonction β d'Euler

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; justifier que :

   pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $J_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$ converge.

2. On pose : $u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0;n] \\ 0 & \text{si } t > n. \end{cases}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(t) \leq e^{-t}$.

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n(x)$.

3. Pour *a* et *b*, réels strictement positifs, on pose $\beta(a,b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt$.

a. Justifier l'existence de cette intégrale.

b. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^x \beta(n+1, x)$.

c. i) Simplifier $\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1)$.

ii) Prouver que : $\beta(a,b+1) = \dfrac{b}{a} \beta(a+1,b)$.

iii) En déduire $\beta(a+1,b)$ en fonction de $\beta(a,b)$.

d. Prouver que : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

4. a. À l'aide d'un changement de variable convenable dans l'intégrale $\beta(a,b)$, établir que :

pour *a* et *b*, réels strictement positifs, $\beta(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta \, \cos^{2b-1}\theta \, d\theta$.

b. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} \, dt$. *On pourra de nouveau procéder à un changement de variable.*

5. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $x > 0$, $\Gamma_r(x) = 2\int_0^r e^{-t^2} t^{2x-1} \, dt$.

a. Etant donné $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, écrire le produit $\Gamma_r(x)\,\Gamma_r(y)$ comme une intégrale double étendue au domaine C_r (cf notations de la première partie).

b. En procédant à un encadrement utilisant les domaines Q_r et Q'_r , de façon analogue à la première partie, établir la double inégalité :

$\Gamma_r(x+y)\,\beta(x,y) \leq \Gamma_r(x)\,\Gamma_r(y) \leq \Gamma_{r\sqrt{2}}(x+y)\,\beta(x,y)$.

c. Démontrer que : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Quatrième Partie
Loi Gamma et loi du χ^2

Dans toute cette partie, les variables aléatoires sont réelles, définies sur le même espace probabilisé (Ω, B, P).

On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé, (Ω, B, P), alors sa fonction de répartition est la fonction F_X définie pour tout réel x par $F_X(x) = P(X \leq x)$.
Cette fonction de répartition caractérise la loi de la variable aléatoire réelle X.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Une variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λ, lorsqu'elle est déterminée pour tout entier naturel k par $P(Y = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Un extrait de la table des lois de Poisson est donné en annexe à la fin du sujet.

Une variable aléatoire suit une loi normale de paramètres m et σ, lorsqu'elle admet une densité de probabilité définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. *b* et *p* sont deux paramètres réels strictement positifs. On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^{p-1}e^{-\frac{x}{b}}}{b^p\Gamma(p)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Dans le cas où $b = 1$, donner les différentes allures du graphe de f suivant la position du paramètre p par rapport à 1 et à 2. On précisera les éventuelles demi-tangentes en 0.

2. Prouver que f est une densité de probabilité.

   Si une variable aléatoire X admet cette densité, on dit que X suit la loi $\Gamma(b, p)$.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma(b, p)$.
   Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

4. Dans le cas particulier où $p = 1$, reconnaître la loi de X et exprimer sa fonction de répartition.

On admet que si X et Y sont 2 variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g, alors la variable $X+Y$ possède une densité h telle que $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$ et on admet la convergence de l'intégrale $h(x)$ pour tout x réel.

5. Soient X_1 et X_2, variables aléatoires réelles indépendantes, suivant les lois respectives $\Gamma(b, p_1)$ et $\Gamma(b, p_2)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi $\Gamma(b, p_1 + p_2)$.

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, suivant les lois respectives $\Gamma(b, p_i)$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$. *On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.*

   Soit s un entier strictement positif ; on appelle loi du χ^2 à s degrés de liberté ou loi $\chi^2(s)$ la loi $\Gamma\left(2, \frac{s}{2}\right)$.

7. Donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\chi^2(s)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, les X_i sont des variables mutuellement indépendantes, X_i suivant la loi $\chi^2(s)$, donner la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

8. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule : $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^{x-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$.

9. Soient X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi $\chi^2(2n)$ et λ un réel strictement positif.
   Démontrer que $P(X_{2n} > 2\lambda) = P(Y_\lambda < n)$ où Y_λ désigne une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

10. On appelle F_4 la fonction de répartition de X_4, variable suivant une loi $\chi^2(4)$. À l'aide de la table de loi de Poisson donnée en annexe page 9, calculer les valeurs de F_4 aux points 0, 2, 4, 6, 8.

11. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que X^2 suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.

12. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes, suivant la loi normale centrée réduite. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$?

Cinquième Partie
De l'urne au χ^2

Une urne contient des boules de couleurs C_1, C_2, …,C_k. ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$). Les boules de couleur C_i sont en proportion p_i non nulle avec $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Étant donné n entier naturel non nul, on tire successivement dans l'urne n boules, avec remise après chaque tirage.
Pour *i*, entier entre 1 et *k*, on appelle X_i la variable aléatoire désignant le nombre de boules de couleur C_i obtenues lors du tirage. X_i suit par conséquent une loi binomiale de paramètres *n* et p_i.

1. a. Déterminer l'espérance et la variance de X_i.

   b. Pour $i \neq j$, déterminer la loi de $X_i + X_j$ et en déduire que $Cov(X_i; X_j) = -np_i p_j$.

2. Soit *k* entier supérieur ou égal à 2. On pose $Y_i = \dfrac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ et on note M la matrice de covariance des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$, définie par $M = \left(Cov(Y_i; Y_j)\right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$.

   a. Montrer que pour $i \neq j$, $Cov(Y_i; Y_j) = -\sqrt{p_i p_j}$ et que $Cov(Y_i; Y_i) = 1 - p_i$. En déduire l'expression de la matrice *M*.

   b. *Dans la suite,* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. On notera* I_k *la matrice unité de* $\mathfrak{M}_{k,k}(\mathbb{R})$.
   Préciser la matrice P telle que $M = I_k - P$, puis la matrice $C \in \mathfrak{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $P = C.{}^tC$, où ${}^tC$ désigne la transposée de la matrice *C*.

   c. Déterminer le rang de *P*.

   d. Calculer P^2. Préciser les valeurs propres de *P* et leur multiplicité.

3. Soit $J \in \mathfrak{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ dont les coefficients a_{ij} vérifient : $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
   Justifier l'existence d'une matrice $S \in \mathfrak{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tS.S = I_k$ et ${}^tSMS = J$.

4. On définit les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ par la relation : $\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}$

et on pose $S = \left(s_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}}$.

a. Prouver que, pour tout entier i entre 1 et k, Z_i est centrée.

b. Déterminer la matrice de covariance de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$. En déduire que Z_k est la variable certaine égale à zéro.

c. On pose $Q = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2$. Calculer Q en fonction de $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$.

d. On admet que n est suffisamment grand pour que la loi de chaque variable X_i puisse être approchée par une loi normale. Dans ces conditions, par quelle loi peut-on approcher la loi de Y_i ?

e. On suppose que n est grand, que les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent des lois normales. Justifier le fait que Q suit la loi du χ^2 à $(k-1)$ degrés de liberté.

Annexe : extraits de la table cumulée des lois de Poisson de paramètre λ

Valeurs de $P(Y_\lambda \le k)$ où $(1 \le \lambda \le 7 ; 0 \le k \le 5)$:

k / λ	1	2	3	4	5	6	7
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009
1	0.7358	0.4060	0.1991	0.0916	0.0404	0.0174	0.0073
2	0.9197	0.6767	0.4232	0.2381	0.1247	0.0620	0.0296
3	0.9810	0.8571	0.6472	0.4335	0.2650	0.1512	0.0818
4	0.9963	0.9473	0.8153	0.6288	0.4405	0.2851	0.1730
5	0.9994	0.9834	0.9161	0.7851	0.6160	0.4457	0.3007